பெரியார் தொலைநிலைக் கல்வி நிறுவனம்
(PRIDE)

பெரியார் பல்கலைக்கழகம்
சேலம்–636 011.

இளங்கலை வணிக மேலாண்மை
முதலாமாண்டு
சார்பு பாடம் – 1 : வணிக கணக்கியல் மற்றும் புள்ளியியல்

புத்தக உருவாக்கம்

Dr. V. NAVANEETHAKUMAR
Adhiyamaan College of Engg.
Hosur
Tamil Nadu.

பெரியார் தொலைநிலைக்கல்வி நிறுவனம்
பெரியார் பல்கலைக்கழகம், சேலம் - 11.

இளங்கலை வணிக மேலாண்மை

முதலாமாண்டு

சார்பு பாடம் – 1 : வணிக கணக்கியல் மற்றும் புள்ளியியல்

பாட அறிமுகம் -

அலகு	1	-	வரிசை தொடர்கள் மற்றும் அணிகள்
அலகு	2	-	நிதி மேலாண்மை கணிதம்
அலகு	3	-	வரைபடம் மூலம் விளக்குதல்
அலகு	4	-	மாறுதலின் அளவுகள்
அலகு	5	-	குறியீட்டு எண் மற்றும் காலத் தொடர்கள்

பாட அறிமுகம்

அன்பார்ந்த மாணவர்களே,

இந்த பாடநூல் ஆனது, இளநிலை மாணவர்களை மனதில் கொண்டு கொடுக்கப்பட்ட பாடத்திட்டத்திற்கு ஏற்ப எளிதில புரிந்து கொள்ளும் வண்ணம் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அனைத்து அலகுகளும் மாதிரி கணக்குகள் மற்றும் விளக்கத்துடன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்களின் இறுதி தேர்வை மனதில் கொண்டு மிக கவனத்துடன் எளிய உதாரணத்துடன் விளக்கப்பட்டுள்ளது. படித்து பயன்பெற வாழ்த்துக்கள்.

அலகு - 1

வரிசை தொடர்கள் மற்றும் அணிகள்

1.1 முன்னுரை : –

இந்த அத்தியாத்தை வாசித்தால் வரிசை மற்றும் தொடர்களை எளிதில் புரிந்துகொள்ளலாம். அனைத்து வரையறைகளும் உதாரணத்துடன் விரிவாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றும், எடுத்துக்காட்டுகளும் விரிவான விளக்கத்துடன் படிப்படியாக விளக்கப்பட்டுள்ளது. சூத்திரங்களும் தனியாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

1.2 குறிக்கோள் (Objectives)

1. உபயோகங்களை தெரிந்துக்கொள்ளுங்கள்.
2. அணிகள் பயன்பாடு மற்றும் அதற்கான சூழ்நிலையையும் தொழிற்சாலைகளை சார்ந்து அறிந்து கொள்ளுதல்.

1.3 வரிசை (Sequence)

முறையாக வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண்களுக்கு வரிசை என்று பெயர்.

(எ.கா.)

(1) 1, 2, 3, 4 . . . .

(2) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ . . . .

1.4 தொடர்

தொடர் என்பது வரிசைகளின் கூட்டு தொகையாகும். இதை கீழ்கண்டவாறு மூன்று வகையாக பிரிக்கலாம்.

(அ) ஒரு தொடரில் எந்த பகுதிகளை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதன் வித்தியாசங்கள் மாறிலி (Constant). இதற்கு கூட்டுத் தொடர் என்று பெயர்.

(எ.கா.)

(i) 1, 4, 7, 10 . . . .

(ii) 6, 1, –4, –9, –14 . . . .

பொதுவாக கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

a, a+d, a+2d, ...

n^{th} term கண்டுபிடிப்பதற்கான சூத்திரம்

$$T_n = a + (n-1) d$$

எ.கா. 1

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 9வது பகுதி (Term) 465 மற்றும் 20வது பகுதி (Term) 388 என்றால் 40வது பகுதியை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

சூத்திரம் $T_n = a + (n-1) d$

9^{th} term = 465

$\therefore T_9 = a + (9-1) d = 465$

அதாவது $a + (8) d = 465$ -------- (1)

இதைப்போலவே, 20வது பகுதி $\Rightarrow$

$a + (20-1) d = 388$

$\therefore a + 19 d = 388$ -------- (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

(1) – (2) $a + 8d = 465$ (-)

$a + 9d = 388$

$-11d = 77$

$\therefore d = -7$

(1) லிருந்து, $a - 56 = 465$

$\therefore a = 521$

எனவே, a மற்றும் d-ன் மதிப்பை கீழ்கண்டவாறு உபயோகித்து 40வது பகுதியை கண்டறியலாம்.

$T40 = a + 39d = 521 + 39 (-7)$

$T40 = 248$

அதாவது, 40வது பகுதி = 248

எ.கா. 2

ஒரு கூட்டுத்தொடரின் 7வது பகுதி 39 மற்றும் 17வது பகுதி 69 எனில் கூட்டுத் தொடரை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

சூத்திரம் $T_7 = a + 6d = 39$

$a + 6d = 39$ -------- (1)

$T_{17} = a + 16d = 69$

$\therefore a + 16d = 69$ -------- (2)

(1) மற்றும் (2) நமக்கு தேவையான கூட்டுத்தொடராகும்.

எ.கா. 3

ஒருவரின் மாத சம்பளம் கூட்டுத்தொடரின் விகிதத்தில் வருடத்திற்கு உயர்கிறது. இதில் விபரமானது சம்பளமாக அவருடைய 11வது வருடத்தில் ரூ. 200ம் மற்றும் 29வது வருடத்தில் ரூ. 380ம் வாங்குகின்றார். அவருடைய முதல் சம்பளத்தை கணக்கிடவும். அவருடைய வருடாந்திர உயர்வு விகிதத்தையும் கணக்கிடவும்.

தீர்வு :

a = முதல் சம்பளமாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

d = வருடாந்திர உயர்வு விகிதம் என எடுத்துக்கொள்வோம்.

எனவே, கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$a + 10d = 200$ -------- (1)

$a + 28d = 300$ -------- (2)

(1) – (2) $\Rightarrow$ $18d = 180$

$\therefore\ d = 10$

இதேபோல், $d = 10$ என்பதை சமன்பாடு (1)–ல் உபயோகித்தால் $a = 10$ என கிடைக்கும். இதிலிருந்து முதல் சம்பளம் a = ரூ. 100 மற்றும் வருடாந்திர உயர்வு விகிதம் ரூ. 10 எனவும் கண்டுகொள்ளலாம்.

1.5 பெருக்கு தொடர் [Geometric Progression (GP)]

ஒரு தொடரில் எந்த இரு பகுதியின் விகிதமானது அதற்கு முன்னால் உள்ளப் பகுதியின் மாறிலியாக இருக்கும்.

எ.கா.

(i) 2, 4, 8, 16

(ii) $a,\ ar,\ ar^2$

1.6 சூத்திரம் (n^{th} term-ஐ கண்டுபிடிக்க)

$$T_n = ar^{n-1}$$

எ.கா.

மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 21 மற்றும் அவற்றின் பெருக்குத் தொகை 216, எனில் அந்த மூன்று எண்களை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

$\frac{a}{r},\ a,\ ar$ என்பது அந்த மூன்று எண்கள் என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore$ மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகையானது

$$\frac{a}{r} + a + ar = 21 \quad \text{-------- (1)}$$

மூன்று எண்களின் பெருக்குத் தொகை

$$\frac{a}{r} \,.\, a \,.\, ar = 21\ 6 \quad \text{-------- (2)}$$

$\therefore\ a^3 = 216$

$a = 6$

(1)–லிருந்து

$$\frac{6}{r} + 6 + 6.r = 21$$

$\Rightarrow\ 6 + 6r + 6r^2 = 21r$

காரணிப்படுத்தினால் கீழ்கண்டவாறு விடை காணலாம்.

(ie) $r = 2$ (or) $= 1/2$

Case (i)

$a = 6$ மற்றும் $r = 2$ எனும்போது, எண்கள்

$6/2,\ 6,\ 6(2) \Rightarrow 3,\ 6,\ 12$

Case (ii)

$a = 6$ மற்றும் $r = 1/2$ எனும்போது,

எண்கள் 12, 6, 3 என விடை காணலாம்.

1.7 சூத்திரம் (n எண்களின் கூட்டுத்தொடரை காண)

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

எ.கா.

கீழ்கண்ட தொடரின் n பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகைகளை காண்க.

3, 2, 4/3, 8/9 . . . .

தீர்வு :

மேற்கண்ட தொடரிலிருந்து கீழ்கண்டவாறு அனுமானம் செய்து கொள்ளலாம்.

$a = 3$ மற்றும் $r = 2/3$

$$\therefore \; S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3\,[(2/3)^n - 1]}{2/3 - 1}$$

$$= \frac{9\,[(2/3)^n - 1]}{2 - 1}$$

$$\therefore \; S_n = 9\,[1 - (2/3)\,n\,]$$

1.8 இசைத்தொடர் (Harmonic Progression)

கூட்டுத்தொடரின் தலைகீழ் இசைத்தொடர் எனப்படும்.

1.9 அணிகள்

முன்னுரை :

இந்த அத்தியாயத்தை படிக்கும்போது, வெகு நிச்சயமாக அனைத்து வகையான அணிகளைப் பற்றியும் அறிந்துகொள்ளலாம். மற்றும் அதனுடைய பயன்பாடுகளைப் பற்றியும் தெளிவாக அறிந்து கொள்ளலாம்.

குறிக்கோள் :

தெளிவாக அணிகளின் பயன்பாடுகளை விவரிப்பது மற்றும் தொழிற்சாலையை சார்ந்த அணிகளின் பயன்களை அறிந்துகொள்வது.

1.9.1. வரையறை :

(i) அணிகள் : செவ்வகமாக அடுக்கப்பட்ட வரிசைகளையும் பத்திகளையும் உடையது அணிகள் எனப்படும்.

எ.கா.

A என்பதை அணி என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட அணியானது 3 வரிசைகளையும் (row) மற்றும் 3 பத்திகளையும் (column) கொண்டது. இதை 3 x 3 அணி என கணித முறைப்படி விளக்கலாம்.

(ii) சதுர அணி (Square Matrix) :

கொடுக்கப்பட்ட அணியில் வரிசைகளின் எண்ணிக்கையும் பத்திகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருந்தால் அதை நாம் சதுர அணி எனக் குறிப்பிடலாம்.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட அணியில் 3 வரிசைகளையும் அதற்கு சமமான 3 பத்திகளையும் காணலாம்.

(iii) மூலைவிட்ட அணி (Diagonal Matrix) :

கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணியில் அனைத்து எண்களும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கவேண்டும், மூலைவிட்ட எண்களைத் தவிர. அதற்கு மூலைவிட்ட அணி என்று பெயர்.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(iv) வரிசை அணி (Row Matrix) :

ஒரே ஒரு வரிசை மட்டும் உடைய அணிக்கு வரிசை அணி என்று பெயர்.

எ.கா.

$A = [7 \;\; 0 \;\; 0]$

(v) பத்தி அணி (Column Matrix) :

ஒரே ஒரு பத்தி மட்டும் உடைய அணிக்கு பத்தி அணி என்று பெயர்.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(vi) அலகு அணி (Identity Matrix [or] Unit Matrix) :

அலகு அணி என்பது மூலைவிட்ட அணியில் அனைத்து மூலைவிட்டங்களும் 1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

எ.கா. (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எ.கா. (2)

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(vii) சமச்சீர் அணி (Symmetric Matrix) :

சமச்சீர் அணி என்பது, ஒரு சதுர அணி கீழ்கண்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட வேண்டும்.

அதாவது A = [aij] என்பது ஒது சதுர அணி என எடுத்துக்கொள்வோம்.

இப்பொழுது [aij] = [aji] அனைத்து i மற்றும் j க்கு என்ற நிபந்தனையை பூர்த்தி செய்தால் A என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி எனக் கொள்ளலாம்.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

(ix) சாய்வு–சமச்சீர் அணி (Skew-Symmetric Matrix) :

சாய்வு சமச்சீர் அணி என்பது, ஒரு சதுர அணி கீழ்கண்ட நிபந்தனைக்கு உட்பட வேண்டும்.

அதாவது [aij] = [aji]

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -5 & 4 & -8 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

1.9.2. அணிகளின் கூட்டு மற்றும் கழித்தல் முறைகள்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிகளை கூட்டும்போதோ அல்லது கழிக்கும்போதோ எடுத்துக்கொண்ட அனைத்து அணிகளின் வரிசைகளும், பத்திகளும் சமமான எண்ணிக்கையில் இருக்க வேண்டும்.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

இப்போது, இரு அணிகளை கூட்டும்போது, கீழ்கண்டவாறு கூட்ட வேண்டும்.

$$A+B=\begin{bmatrix}1+5 & 5+6 & 6+6\\ 3+2 & 3+2 & 0+0\\ 1+0 & 0+0 & 8+4\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}6 & 11 & 12\\ 5 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 12\end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$ என அறியலாம்.

இரு அணிகளின் பெருக்கல்

இரண்டு அணி A மற்றும் B–ஐ பெருக்க வேண்டும் எனில் A என்ற அணியில் உள்ள பத்தியின் (Column) எண்ணிக்கையும், B என்ற அணியில் உள்ள வரிசையின் (Row) எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும். இதை AB என குறிப்பிடலாம்.

எ.கா.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$ மற்றும் $$B=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}(1x4)+(2x2)+(3x1) & (1x5)+(2x3)+(3x2)\\ (3x4)+(2x2)+(1x1) & (3x5)+(2x3)+(1x2)\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}11 & 17\\ 17 & 13\end{bmatrix}$$

எ.கா.

A மற்றும் B என இரண்டு குடும்பங்கள் உள்ளன. அதில் இரண்டு ஆண்கள், 3 பெண்கள் மற்றும் ஒரு குழந்தை A என்ற குடும்பத்திலும், ஒரு ஆண், ஒரு பெண் மற்றும் 2 குழந்தைகள் B என்ற குடும்பத்திலும் உள்ளனர். தினமும் வரையறுக்கப்பட்ட உணவின் அளவானது 2400 கலோரி ஆண்களுக்கும், 1900 கலோரி பெண்களுக்கும் மற்றும் 1800 கலோரி குழந்தைகளுக்கும் ஆகும்.

இதேபோல் 55 கி. புரோத சத்து ஆண்களுக்கும், 45 கி. மற்றும் 35 கி. முறையே பெண்களுக்கும் மற்றும் குழந்தைகளுக்கும் ஆகும். மேற்கண்ட விவரங்களை அணிகளாக எழுதவும். மற்றும் 2 குடும்பத்திற்கும் தேவையான கலோரி மற்றும் புரோத சத்தை கணக்கிடவும்.

தீர்வு

$$A = \begin{array}{ccc} \text{ஆ} & \text{பெ} & \text{கு} \\ \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{cc} \text{க} & \text{பு} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2400 & 55 \\ 1900 & 45 \\ 1800 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \text{க} & \text{பு} \end{array}$$

$$AB = \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{bmatrix} 12300 & 278 \\ 7900 & 166 \end{bmatrix}$$

மேற்கண்ட விடையிலிருந்து Aக்கு தேவையான களோரி மற்றும் புரத சத்தையும் அதே போல் B குடும்பத்திற்கான அளவையும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

Transpose of a Matrix

கொடுக்கப்பட்ட அணியின் வரிசையை பத்தியாகவும், பத்தியை வரிசையாகவும் மாற்றி அமைக்கப்பட்ட அணி கொடுக்கப்பட்ட அணியின் Transpose என அழைக்கப்படுகிறது.

எ.கா.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ எனில்}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

அணியின் திட்டம் (Determinent of a Matrix)

கீழ்கண்ட 2 x 2 அணியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

இவற்றின் திட்டத்தை கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$|A| = (a_{11} . a_{22}) - (a_{21} . a_{12})$$

இதேபோல் 3 x 3 அணிக்கும் கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ என்க.

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

எ..கா.

கீழ்கண்ட அணியின் திட்டத்தை காணவும்.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(4-0) - 3\,(16-16) + 1\,(0-3)$$

$$|A| = -25$$

ஒருமை அணி (Singular Matrix) :

கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணியின் திட்டம் பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அதை ஒருமை அணி எனக் கூறலாம்.

எ.கா.

கீழ்கண்ட அணியை ஒருமை அணி என நிறுவுக.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

இங்கு $|A| = 0$ எனக் காணலாம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அணி ஒருமை அணி ஆகும்.

இணை அணி (Adjoint Matrix) :

கொடுக்கப்பட்ட அணியின் உபகரணி அணியின் திருப்பு அணியை இணை அணி எனக் கூறலாம்.

எ.கா.

கீழ்கண்ட அணியின் இணை அணியைக் காண்க.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

தீர்வு :

முதலில் உபகாரணிகளை அனைத்து உறுப்பிற்கும் கண்டுபிடிப்போம்.

1–ன் உபகாரணி = $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

1–ன் உபகாரணி = $-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9$

1–ன் உபகாரணி = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$

1–ன் உபகாரணி = $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$

2–ன் உபகாரணி = $+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = +1$

–3–ன் உபகாரணி = $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

2–ன் உபகாரணி = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$

–1–ன் உபகாரணி = $-\begin{vmatrix} 01 & 1 \\ 01 & -3 \end{vmatrix} = 4$

3–ன் உபகாரணி = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$\therefore \text{ A–ன் உபகாரணி அணி } = \begin{vmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

இணை அணி = (A-ன் உபகாரணி அணி)^{A}

$$\text{A-ன் இணை அணி } = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

தலைகீழ் அணி (Inverse Matrix) :

தலைகீழ் அணியை A^{-1} என குறிப்பிடலாம்.

$$A^{-1} = \frac{\text{A ன் இணை அணி}}{\text{A ன் திட்டம்}}$$

$$\text{(ie.,)} \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

எ.கா.

கீழ்கண்ட அணியின் தலைகீழ் அணியை காண்க.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

தீர்வு :

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$\text{Aன் உபகாரணி அணி } = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

மேலும், $|A| = 15$

எனவே, Aன் தலைகீழ் அணி

$$A^{-1} = \frac{1}{15}$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

சுருக்கமாக (Summary) :

இந்த அத்தியாயத்தில் கீழ்கண்டவற்றை விவரமாக அறிந்தோம்.

1. கூட்டு, பெருக்கு மற்றும் இசைத் தொடருக்கான வரையறை மற்றும் கணக்கீடுகளை கண்டோம்.

2. அனைத்து வகையான அணிகளையும் மற்றும் கணக்கீடுகளையும் அறிந்தோம்.

பயிற்சிகள் :

1. n-வது term-க்கான கணக்கீடுகளை செய்ய உதவும் கூட்டு தொடருக்கான சூத்திரத்தை எழுதவும் ?

2. கூட்டு மற்றும் இசைத் தொடர்களின் தொடர்புகளை எழுதவும்.

3. $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ எனில் கீழ்கண்டவற்றை சரிபார்க்க.

   $(AB)^T = B^T A^T$

4. திருப்பு அணிக்கான (Transpose Matrix) குணங்களை எழுதுக.

5. தலைகீழ் அணியை காணும் வழிமுறைகளை எழுதுக.

6. n-வது பகுதியை (Term) கணக்கிடுக.

   6, 4, 4/3, 8/9 ....

குறிப்புகள்

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

அலகு - 2

நிதி மேலாண்மைக்கான கணிதம்

(Mathematics of Finance)

2.1 முன்னுரை : –

பணத்திற்கு கால மதிப்பு உண்டு என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. அனைத்து வியாபாரிகளும் ஒப்புக்கொள்ள கூடிய விசயமானது ஒரு வருடம் கழித்து கிடைக்கக்கூடிய ஒரு ரூபாயைவிட இன்று கையில் உள்ள ஒரு ரூபாய்க்கு மதிப்பு அதிகம். ஏனெனில், தற்சமயம் உள்ள பணத்தை வேறு லாபம் தரக்கூடிய தொழிலில் ஈடுபடுத்தி பன்மடங்காக்க முடியும்.

2.2 குறிக்கோள் (Objectives)

1. இதைப் படித்தால் நிதி மேலாண்மைக்கான கணிதப் பயன்பாட்டை அறிந்து கொள்ளலாம்.
2. கணக்கீட்டிற்கான முறைகளையும், அதற்கான விளக்கங்களையும் அறிந்து கொள்ளலாம்.

2.3 தனி மற்றும் கூட்டு வட்டி (Simple and Compound Interest

இன்றைக்கு Rs. P. யை முதலீடு செய்தால், முதல் காலம் முடிவில் அதற்கான வட்டியை எதிர்பார்க்கலாம். ஒவ்வொரு காலம் முடிவிலும் கிடைக்கும் வட்டியினை அதிலேயே முதலீடு செய்தால் முதல் கால முடிவில் கீழ்கண்ட தொகையை பெறலாம். $P+PXi = P(1+Xi)$ ஏனென்றால் PXi என்பது செய்த முதலீட்டிற்காக கிடைத்த வட்டியாகும். மேலும், $P(1+Xi)$ என்பது i என்ற லாப விகிதத்தை கொடுக்கும். இதேபோல் இரண்டாவது கால முடிவில் $P(1+Xi)^2$ எனும் தொகையை i எனும் வட்டி விகிதத்தில் பெறலாம். இதேபோல் n கால அவகாசத்தில், அதன் முடிவில்

$$A = P(1+Xi)^n$$

எனும் தொகையை பெறலாம். இங்கு A என்பது கூட்டுத்தொகையாகும். மற்றும் i என்பது கூட்டு வட்டியாகும். அப்படியில்லாமல் தனி வட்டி என்பது $P + PXi\ Xn = P(1 + Xi\ Xn)$.

தற்கால மதிப்பு (Present Value)

பொதுவாகவே அனைவருக்குமான ஆர்வம் என்னவெனில் n காலகட்டத்திற்கு பிறகு கிடைக்க கூடிய தொகையின் தற்போதைய மதிப்பை அறிந்துகொள்வது. அதற்கு கீழ்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

இங்கு, $\frac{1}{(1+i)^n}$ என்பது தள்ளுபடி காரணி எனப்படும்.

எ.கா.

நாலு வருட காலத்திற்கு பிறகு கிடைக்கக்கூடிய ரூ. 1 ன் மதிப்பு என்ன? தள்ளுபடி விகிதம் 6% என இருந்தால்

தீர்வு :

தற்கால மதிப்பு $P = \frac{A}{(1+i)^n}$

இங்கு, $A = 1$ & $i = 6\%$ மற்றும் $n = 4$

எனவே, $P = \frac{1}{(1+0.06)^4}$

$= \text{Rs. } 0.792$

எ.கா.

தற்கால மதிப்பை கணக்கிடுக. முதல் கால முடிவில் ரூ. 100ம் இரண்டாவது கால முடிவில் ரூ. 200ம், 6% தள்ளுபடி விகிதத்தில் கிடைத்தால்

தீர்வு :

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$= \frac{100}{(1.06)^1} + \frac{200}{(1.06)^2}$$

$$= 94.34 + 178$$

$$= \text{Rs. } 272.34$$

ஆண்டுத் தொகை (Annuities)

சம அளவு முதலீடு, சமகால அளவில் வரையறுக்கப்பட்ட கால அளவிற்கு முதலீடு செய்வது. பொதுவாக, ஒவ்வொரு காலம் முடிவிலும் முதலீடு செய்ததாக எடுத்துக் கொள்ளப்படும். அதாவது அடிப்படை உண்மையானது கால சுழற்சி

(Periodic) முறையில் கிடைக்கும் தொகை. முதலீட்டிற்கான திட்டம் n–வது கால முடிவிற்கு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

காலம்	-	1^{st}	2^{nd}	...	$(n-1)^{th}$	n^{th}
முதலீடு செய்த தொகை	-	P	P	...	P	P
வட்டிக்கான வருட எண்ணிக்கை	-	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-2}$	...	$P(1+i)$	P

அதாவது, மொத்த தொகை n–வது கால முடிவில்

$$A = P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + ... + P(1+i) + P \qquad ---- (1)$$

மேற்கண்ட சமன்பாடு (1)–யை (1+i)-னால் பெருக்கி மற்றும் கணக்கீட்டால், நமக்கு கீழ்கண்ட சூத்திரம் கிடைக்கும்.

$$A = \frac{P\{(1+i)n - 1\}}{i}$$

வெவ்வேறு காலங்களுக்கும், வட்டிகளுக்கும் ஆண்டுத் தொகையை கணக்கிட அட்டவணைகள் உள்ளன.

எ.கா.

ஒரு முதலீட்டாளர் ரூ. 1000–யை ஒரு வங்கியில் முதலீடு செய்கிறார். ஒவ்வொரு கால முடிவிலும் மேற்கண்ட தொகை முதலீடு செய்கிறார். வட்டி விகிதம் 6% எனில் எவ்வளவு தொகையை 10–வது வருட முடிவில் அவர் பெறுவார்.

தீர்வு :

ஆண்டுத்தொகை, $(A) = P \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$

$$= 1000 \left[\frac{(1+0.06)^{10} - 1}{0.06} \right]$$

$$= \text{Rs. } 13800.80$$

எ.கா. 2

ஒரு முதலீட்டாளர் ரூ. 100–யை ஒவ்வொரு ஆண்டும் செலுத்த திட்டமிடுகிறார். கூட்டு வட்டி 5% எனில் 10–வது வருட முடிவில் அவர் பெறும் தொகை எவ்வளவு ?

தீர்வு :

$$\text{ஆண்டு தொகை} = 100 \left[\frac{(1+0.06)^{10} - 1}{0.05} \right]$$

$$= \text{Rs. } 1257.70$$

ஆண்டு தொகையின் தற்கால மதிப்பு (Present Value of an Annuity) :

ஆண்டு தொகையின் தற்கால மதிப்பை ஒவ்வொரு தனித்தனியான ஆண்டு தொகையை கூட்டும்போது கிடைக்கும்.

அதாவது

$$PV = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

(i.e.,)

$$PV = \frac{P\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

எ.கா. 1

ரூ. 1–க்கான ஆண்டுத்தொகையின் தற்கால மதிப்பை 6ரூ வட்டியில் மூன்று வருடத்திற்கு கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$PV = \frac{P\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$= \frac{1\,[1-(1+0.06)^{-3}]}{0.06}$$

$$= \text{Rs. } 2.673$$

எ.கா. 2

நான்கு வருட கால அவகாசத்திற்கு, ஒரு திட்டமானது வருடத்திற்கு ரூ. 2,50,000 வீதமாக லாபம் கொடுக்கிறது. வட்டி விகிதம் 15% எனில் அத்திட்டத்திற்கான தற்போதைய மதிப்பை கணக்கிடுக.

தீர்வு :

$$PV = \frac{P\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$PV = \frac{2,50,000\,[1-(1+0.15)^{-4}]}{0.15}$$

$$= \text{Rs. } 7,13,750$$

எ.கா. 3

10 வருட கால அவகாசத்திற்கு, ரூ. 100 வீதம் 6% வட்டியில் பெற்றால், ஆண்டு தொகையின் தற்கால மதிப்பை காணவும்.

தீர்வு :

$$PV = \frac{P\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

$$PV = \frac{100\,[1-(1+0.06)^{-10}]}{0.06}$$

$$= \text{Rs. } 736$$

Sinking Fund Factor :

ரூ. 1–யை பெறுவதற்கான ஒவ்வொரு வருட இறுதியிலும் முதலீடு செய்வதற்கான தொகை அளவை K% வட்டியில் குறிக்கின்றது. இதை, கீழ்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.

$$FVA = A\left[\frac{P\,(1+K)^{n} - 1}{K}\right]$$

இதை மாற்றி கீழ்கண்டவாறும் எழுதலாம்.

$$A = FVA\left[\frac{K}{(1+K)^{n} - 1}\right]$$

$$\left[\frac{K}{(1+K)^n - 1}\right]$$ என்பது Sinking Fund Factor என அழைக்கப்படுகிறது.

தள்ளுபடி (Discounting)

தற்கால மதிப்பிற்கான பண அளவை காணும் வழிமுறைக்கு தள்ளுபடி செய்தல் என அழைக்கப்படுகிறது. இதில் கால அளவிற்கான தொகையும் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படும். எப்பொழுதும் தள்ளுபடி சதவிகிதத்தை ஆண்டு சதவிகிதமான வரையறுக்க வேண்டும். எனவே, மொத்த தற்கால மதிப்பை பயன்படுத்தலாம். (NPV)

(ie.,) $$NPV = \frac{100}{(1+i)^n}$$

தள்ளுபடி விகிதம் (Discounting Rate)

தள்ளுபடி விகிதமானது நிதி மேலாண்மை கூடங்களில் பயன்படுத்தப் படுகிறது. தள்ளுபடி சதவிகிதமானது பலவிதமான தொழிற்கூடங்களிலும் குறிப்பிடத்தக்க வித்யாசங்களுடன் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உயர்ரக தள்ளுபடிக்கான காரணங்கள்

1. குறைந்த முதலீட்டாளர்கள் இருப்பது
2. அதிகபட்ச துணிவு
3. அதிகளவு எதிர்பார்ப்பு
4. குறைந்தளவு வரவேற்ப்பு

சரியான தள்ளுபடி விகிதத்தை காண Capital Risk Free Pricing Model பயன்படுகிறது. இது மூன்று வகையான மாறிகளை (Variables) கொண்டு செயல்படுகிறது.

1. Risk Free Rate
2. Beta - இது தொழிற்சாலை எவ்வாறு பிரதிபலிக்கின்றது வரவேற்பிற்கு ஏற்றவாறு
3. Equity Market Risk Premium - (Risk Free Rate + Beta)

தள்ளுபடி காரணி (Discount Factor)

பிற்கால பண ஓட்டத்தை (Cash Flow) பெறுவதற்கான கால எண்ணிக்கை.

(ie.,) $$PT = \frac{1}{(1+r)^{T}}$$

நிலையான தொடர் கூட்டு தள்ளுபடியை பெறுவதற்கு

$$PT = e^{-VT}$$

சுருக்கமாக (Summary)

மேற்கண்ட அத்தியாயத்தில் நாம்

1. தனி மற்றும் கூட்டு வட்டிகளை காணும் முறை
2. ஆண்டு தொகையை கணக்கிடும் முறை
3. Sinking Fund
4. தள்ளுபடிக்கான விளக்கம்

ஆகியவற்றை அறிந்தோம்.

பயிற்சி :

1. ரூ. 1–யை, நான்கு வருட கால அவகாசத்திற்கு 8% வட்டியில் பெற்றால் தற்போதைய மதிப்பை கணக்கிடவும்.
2. ரூ. 2–யை, ஆறு வருட கால அவகாசத்திற்கு 4% வட்டி விகிதத்தில் பெற்றால் தற்கால மதிப்பை கணக்கிடவும்.
3. ரூ. 200–யை, 10 வருட கால அவகாசத்திற்கு 5% வட்டி விகிதத்தில் பெற்றால் தற்கால மதிப்பை கணக்கிடவும்.
4. ரூ. 500–யை, 10 வருட கால அவகாசத்திற்கு 6% வட்டி விகிதத்தில் பெற்றால் தற்கால மதிப்பை கணக்கிடவும்.

குறிப்புகள்

அலகு - 3

வரைபடம் மூலம் விளக்குதல்

(One Dimension and Two Dimension)

3.1 முன்னுரை : –

அட்டவணை வரைந்து, புள்ளி விபரங்களை விளக்குவது சிறந்த ஒரு உத்தியாக இருந்தாலும் ஒரு சாதாரண படிப்பறிவு இல்லாத மனிதர்கள் எளிதில் புரிந்து கொள்ளமாட்டார். ஆனால் படங்களின் மூலம் விளக்கினால் அவர் எளிதில் புரிந்து கொள்வார்.

3.1.1. படத்தின் பயன்பாடுகள்

1. வரைபடத்தின் உதவியுடன் புள்ளி விவரங்களை எளிதில் புரிந்து கொள்ள முடியும்.
2. இரண்டு உதாரணங்களை எளிதில் ஒப்பிதல் செய்ய உதவுகிறது.
3. இந்த படம் வரையும் முறையை அனைத்து துறைகளிலும் பயன்படுத்த முடியும்.
4. படம் பொதுவாக அனைவரையும் கவரும்.
5. இந்த உறுதி எண்களை பயன்படுத்த கூடிய புள்ளியியல் ஆராய்ச்சிக்கு வெகுவாக பயன்படும்.
6. இந்த படம் உத்திமூலம், காலம் மற்றும் பண விரயத்தை தடுக்க முடியும்.
7. இந்த படம் உத்தியானது நிறைய தகவல்களை அளிக்கும் வண்ணம் அமைந்துள்ளது.
8. இதில் உள்ள புள்ளி விபரங்களை எளிதில் நியாபகத்திற்கு கொண்டு வரமுடியும்.
9. வார்த்தையால் சொல்லமுடியாததைகூட படங்களின்மூலம் எளிதில் விளக்க முடியும்.
10. நிறைய புள்ளி விபரங்கள் இருந்தாலும் எளிதில் படத்தின்மூலம் விளக்க முடியும்.

3.1.2. படம் வரைய தேவைப்படும் விதிகள் :

ஒரு படம் வரையும்போது கீழ்கண்ட விதிகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

1. அது அனைவரையும் கவரும் விதத்தில் இருக்க வேண்டும்.
2. நீள அகலங்களையும் சரி சம விகிதத்தில் கலந்து வரைய வேண்டும்.
3. அது காலம், செலவு, ஆகியவற்றை கருத்தில் கொண்டு வரைய வேண்டும்.
4. அறிவு திறனை பயன்படுத்தி வரைய வேண்டும்.

5. படம் வரையும்போது அதற்கான அலகுகளை வரைபடத்துடன் விளக்க வேண்டும்.

6. வரைதாளில் உள்ள இடத்தை கவனமாக கொண்டு வரைய வேண்டும்.

7. படமானது சுயவிளக்கத்துடன் இருக்க வேண்டும்.

8. படங்களில் நிறைய வகையுள்ளது. தகுந்த பட முறையை தேர்ந்தெடுத்து வரைய வேண்டும்.

9. சில விளக்கங்களை அளிப்பதற்கு, குறிப்பு முறைகளை பயன்படுத்தலாம்.

10. நிறைய வர்ணங்கள் உள்ளது. தகுந்த நிறங்களையும் மற்றும் நிழலாக்கம் மூலமாகவும் எளிதில் விளக்க முயலலாம்.

11. நேரான (அ) செங்குத்தான படமுறையை பயன்படுத்தலாம்.

12. தகுந்த தலைப்புகளை பயன்படுத்தலாம்.

13. படங்கள் மிக நுணுக்கமாக வரையப்பட வேண்டும்.

3.1.3. படங்களில் உள்ள குறைபாடுகள் :

1. வரைபடத்தின் மூலம் உத்தேசமான விடைகளை மட்டுமே அளிக்கமுடியும்.

2. துல்லியமான விடை இல்லையெனில், அதை தொடர்ந்து ஆய்வுக்கு உட்படுத்த இயலாது.

3. இரண்டு படங்களின் அலகுகள் மாறினால் அவ்விரண்டு படங்களையும் ஒப்பிட இயலாது.

4. படங்களில் சிறிய தவறுகள் இருந்தாலும் ஒரு படிப்பறிவு இல்லாதவர்களினால் எளிதில் பிரித்தறிய இயலாது.

3.1.4. படங்களின் வகைகள் :

வரைபடங்களை கீழ்கண்டவாறு பிரிக்கலாம்.

1. One Dimensional Diagram
2. Two Dimensional Diagram
3. Three Dimensional Diagram
4. Pictograms (or) Picture Diagram
5. Maps

3.1.4.1. One Dimensional Diagram

இந்த வகை படங்களில் நீளங்களில் மட்டுமே கவனம் செலுத்தப்படுகிறது. இதை கீழ்கண்டவாறு இரண்டு வகையாக பிரிக்க இயலும்.

(1) Line Diagram

(2) Bar Diagram

(1) Line Diagram :

இந்த வகையில் மாறிகளை விளக்குவதற்கு கோடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இதில் கோடுகள் செங்குத்தாகவும், படுக்கை வசமாகவும் வரையப்படுகின்றன. இதில் கோடுகள் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு தகுந்தவாறு அளவுகளை மாற்றி வரையப்படுகிறது.

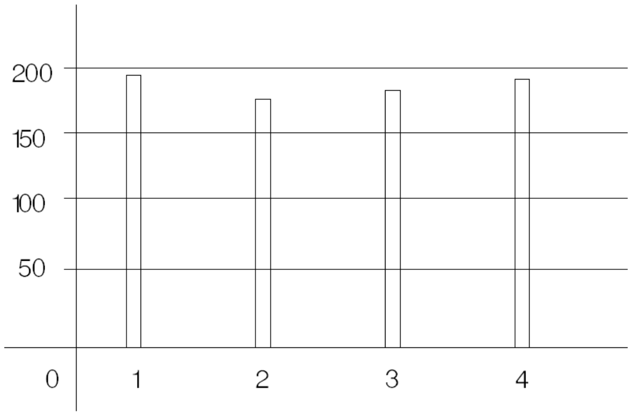
(2) Simple Bar Diagram :

இதில், Line Diagram-ல் பயன்படுத்திய உத்திகளை, இங்கேயும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆனால் கோடுகளுக்கான அகலம் மட்டும் வித்தியாசப்படும். இங்கும் அகல கோடுகளை செங்குத்தாகவோ (அ) படுக்கைவசமாகவோ வரையலாம்.

எ.கா.

சராசரி சம்பளத்தை பற்றிய விபரங்கள் கீழ்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதை Bar diagram ஆக மாற்றவும்.

வேலையாள்	1	2	3	4
சம்பளம்	192	165	177	189



(3) Multiple Bar Diagram :

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளை ஒப்பிடும்போது இந்த வகையான படங்களை பயன்படுத்தலாம். மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்கு தகுந்தவாறு, Barகளின் எண்ணிக்கையும் அமையும்.

(4) Sub-divided Bar Diagram :

Multiple Bar Diagram-ல் பயன்படுத்த முடிந்த அனைத்து புள்ளி விபரங்களையும், இதிலேயும் பயன்படுத்த முடியும்.

(5) Percentage Bar Diagram :

இதுவும் Multiple Bar Diagram போலவே படம் வரைய வேண்டும். ஆனால் அளவுகள் சதவீதத்தில் இருக்க வேண்டும்.

(6) Duo-directional Bar Diagram :

இந்த வகை படங்களில் இரண்டு பக்கமும் Bar–களை வரைய வேண்டும்.

(7) Broken Bar Diagram :

இந்த வகை படங்களை, கொடுக்கப்பட்ட மாறிகள் மிக பெரிதாகவோ (அ) சிறிதாகவோ இருக்கும்போது, இதை பயன்படுத்தலாம்.

3.1.4.2. Two Dimensional Diagrams :

ஒற்றை Bar-முறையில் நீளம் மட்டுமே கருத்தில் கொண்டு வரையப்படுகிறது. அவ்வாறு இல்லாமல், நீளம், அகலம் இரண்டையும் கருத்தில் கொண்டு வரையப்பட வேண்டும். இதை கீழ்கண்டவாறு பிரிக்கலாம்.

(a) செவ்வகம்

நீளம், அகலங்களை சரி விகிதத்தில் வைத்து வரைய வேண்டும்.

எ.கா.

இரண்டு சம்பளக்காரர்களின் சம்பளம் முறையே 10000 மற்றும் 20000. மற்றும் இதர மாறிகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதை சதவீத செவ்வக படமாக மாற்றவும்.

செலவு	உணவு	வாடகை	பயணம்	மற்றது
ஆள் 1	1300	2700	4000	2000
ஆள் 2	3000	7000	6000	4000

தீர்வு :

செலவு	ஆள் 1			ஆள் 2		
	தொகை	%	கூட்டு	தொகை	%	கூட்டு
உணவு	1300	13	13	3000	15	15
வாடகை	2700	27	40	7000	35	50
பயணம்	4000	40	80	6000	30	80
மற்றது	2000	20	100	4000	20	100
	1000			2000		

(b) சதுர வகை படம்

இந்த வகைகளை கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள், வர்க்கம் காண ஏதுவாக இருந்தால் மிக எளிமையாக பயன்படுத்தலாம். கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை வர்க்கபடுத்தி அதை சரியான தசமத்தில் வகுக்கும்போது கொடுத்த அளவுகளை மிக சரியாக சுருக்க முடியும்.

(c) சாதாரண வடிவ படம்

சதுர வகை படத்திற்கு பயன்படுத்தும் அதே நுணுக்கத்தை இதிலும் பயன்படுத்தலாம்.

(d) பிரிக்கப்பட்ட வட்ட வடிவ படம்

இதை Pic-Chart என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. இதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளுக்கு தகுந்த மாதிரி சரியான விகிதத்தில் பிரித்து வரையலாம்.

3.1.4.3. Three Dimension Diagrams (முப்பரிமாணம்) :

Two Dimension Diagram-ல் குறிப்பிட்டது போன்று இங்கு நீளம், அகலம் மட்டுமன்றி உயரத்தையும் கணக்கில் கொள்ள வேண்டும்.

3.2 வரைபடம் முறை

3.2.1 முன்னுரை :

படங்களை எவ்வளவு கவர்ச்சிகரமாக வரைந்தாலும், அதை ஒரு விளம்பரமாகத்தான் பயன்படுத்த முடியும். ஆனால் மேற்கொண்டு அந்த அளவுகளை ஆய்வுக்கு உட்படுத்த முடியாது.

எனவே இந்த வரைபட முறையானது படம் வரையும் முறையை விட சிறந்தது.

3.2.2 வரைபடத்தின் பயன்பாடுகள் :

1. இது படத்தைவிட சிறந்தது.
2. இது செலவு குறைவாகும்.
3. இது சுருக்கமான படத்தை கொடுக்கின்றது.
4. இதை பயன்படுத்துவதன்மூலம் அதிக கணக்கீடுகளை தவிர்க்கலாம்.
5. இது தொலைநோக்குவதற்கு மிகவும் எளிதானது.
6. ஒப்பிடுதலுக்கு மிக சிறந்தது.
7. இதை பயன்படுத்தி மீடியன் (Median) மற்றும் மோடுகளை (Mode) காண முடியும்.

3.2.3 வரைபடத்திற்கான நெறிமுறைகள் :

(Guidelines while preparing a Graph)

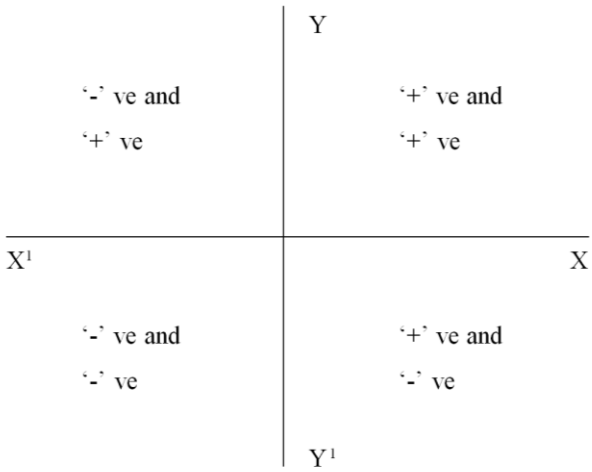
1. இதற்கு கட்டாயம் தலைப்பு கொடுக்க வேண்டும்.
2. வரைபடத்தின் அலகுகளையும் குறிப்பிட வேண்டும்.
3. தேவைபடும் போது வரைபடத்தின் கீழே (Foot Note) குறிப்புகளையும் எழுதலாம்.
4. தேவைபடும் போது Y-அச்சுவை 50% அதிகமாக X-அச்சைக் காட்டிலும் வரையலாம்.
5.. சார்பில்லா மாறிகளை எப்போதும் X-அச்சிலேயே எடுக்க வேண்டும்.

6. சார்புடைய மாறிகளை (Dependent Variable) எப்போதும் Y-அச்சிலேயே எடுக்க வேண்டும்.

3.2.4 வரைபடத் தாளைப் பற்றிய விபரம் :

(Details about Graph Paper)

வரைபடத் தாள் சிறுசிறு கட்டங்களாக பிரிக்கப்பட்டிருக்கும். அனைத்து சதுரங்களின் அளவுகளும் 1/10 cm அளவுக்கு சமமாக இருக்கும். இதில் பொதுவாக 2 நேர் கோடுகள் வரையப்படும். ஒன்று செங்குத்தாகவும் மற்றொன்று படுக்கைவசமாகவும் வரைய வேண்டும். இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளியை மைய வரைபட தாளை நான்கு சம பகுதிகளாக பிரிக்கின்றது. இதில் முதல் கால் பகுதி, மற்றும் இதர மூன்று கால் பகுதிகளும் கீழ்கண்டவாறு '+' (Plus) மதிப்பையும் மற்றும் '-' (Minus) மதிப்பையும் கொண்டிருக்கும்.



3.2.5 அளவுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் முறை : (Choice of Scale)

ஒரு அலகுக்கான அளவை கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்கு தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம். அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கும் போது கொடுக்கப்பட்ட கணக்கில் உள்ள அனைத்து அளவுகளையும் குறிப்பிடுமாறு அளவுகளை (Scale) தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளவும்.

இதில் இரண்டு வகையான வரைபட முறையை தேர்ந்தெடுத்துக் கொள்ளலாம்.

1. Time Series Graphs

2. Frequancy Distribution Graphs

3.3 மைய புள்ளி சார்பு (Central Tendencies)

3.3.1 வரையறை :

ஒவ்வொரு புள்ளியியல் அறிஞர்களும் ஒவ்வொரு வகையான வரையறைகளை வரையறுக்கின்றனர். பொதுவாக நிறைய புள்ளி விபரங்கள் இருக்கும்போது மைய புள்ளி சார்பை பயன்படுத்தி ஒரு சிறிய அளவாக மாற்ற இயலும். மையபுள்ளி சார்பானது கீழ்கண்டவற்றை காணப் பயன்படுகிறது.

1. சராசரி (Mean)

2. நேர்கோடு (Median)

3. முகடு (Mode)

3.3.2 கூட்டு சராசரி (Arithmetic Mean) :

கூட்டு சராசரி என்பது அனைத்து கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளையும் கூட்டி கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்தால் கிடைக்கக் கூடியது. அதற்கு கீழ்கண்ட சூத்திரங்கள் பயன்படுகின்றன.

Case (i) கொடுக்கப்பட்ட அளவு சாதாரண 'n' அளவான புள்ளி விபரங்கள் இருக்கும்போது

$$\text{A.M.} \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots\dots\dots + X_n}{n}$$

i.e.,

$$\text{A.M.} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Case (ii) கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் frequency வகையை சார்ந்து இருந்தால்

$$\text{A.M.} \quad \overline{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \dots\dots\dots \text{ x } f_nX_n}{N}$$

i.e.,

$$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

எ.கா. 1

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து கூட்டு சராசரியை (A.M.) கண்டுபிடிக்கலாம்.

X	1	2	3	4	5	6
f	5	9	12	17	14	10

தீர்வு

Xi	fi	Xifi
1	5	5
2	9	18
3	12	36
4	17	68
5	14	70
6	10	60
	N = 67	257

$$\therefore \ AM = \frac{257}{67} = 3.836$$

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட அளவுகள் தொடர் frequency அளவாக இருக்கும்போது

$$X = A + \frac{h \sum_{i=1}^{N} fidi}{N}$$

$$\text{இங்கு } di = \frac{Xi - A}{h}$$

h = இடைவேளையின் நீளம்

A = கூட்டு சராசரி என எடுத்துக் கொள்வோம்

எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையில் இருந்து கூட்டு சராசரியை காண்க.

Interval	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Marks	12	18	27	20	17	6

தீர்வு :

மதிப்பெண்	இடைமதிப்பு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	$d_i = x_i - 25$	$f_i d_i$
0-10	5	12	-20	-240
10-20	15	18	-10	-180
20-30	25	27	0	0
30-40	35	20	10	200
40-50	45	17	20	340
50-60	55	6	30	180
		N = 100		$\Sigma f_i d_i = 300$

$$\text{AM } \overline{X} = A + \frac{h \sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

$$= 25 + \frac{300}{100} = 28$$

3.3.3 நடுக்கோடு (Median) :

கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளில் நடுக்கோடு என்பது கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை சரிசமமாக பிரிக்கும்.

3.3.4 நடுக்கோடு காண்பதற்கான வழிமுறைகள் :

(i) $\frac{N}{2}$ வை கண்டுபிடிக்கவும்.

இங்கு $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

(2) அதில் மொத்த கூட்டு தொகையில் $\frac{N}{2}$ கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

பிறகு $\frac{N}{2}$ வை விட சற்று பெரிய அளவை தேர்ந்தெடுத்து அதற்கு

தொடர்புள்ள அளவை நடுக்கோட்டுக்கான அளவாக கூறலாம்.

எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையில் இருந்து நடுக்கோட்டை காண்க.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	8	10	11	16	20	25	15	9	6

தீர்வு :

Xi	fi	fixi
1	8	8
2	10	18
3	11	29
4	16	45
5	20	65
6	25	90
7	15	105
8	9	114
9	6	120
	N = 120	

$$\frac{N}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

மேற்கண்ட அட்டவணையில் கஹை தொடர்புள்ள அளவுகளில் 60யை விட சற்று பெரிய அளவை கண்டறியவும். இங்கு, 60யை விட சற்று பெரிய மதிப்பு 65 ஆகும். அதற்கு தொடர்புடைய X-ன் மதிப்பு 5 ஆகும். இங்கு, 5 என்பது நடுகோட்டிற்கான (Median) அளவாகும்.

குறிப்பு : தொடர் அளவிற்கு கீழ்கண்டவாறு சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{Median} = l + \frac{h}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

இங்கு,

l = நடுக்கோட்டின் கீழ் அளவு

h = வித்தியாசம்

f = frequency ஆகும்

c = கூட்டுத்தொடராகும்

எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து நடுகோட்டினை கண்டுபிடிக்கவும்.

வயது	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
எண்ணிக்கை	3	5	20	10	5

தீர்வு :

வயது	இடைமதிப்பு	எண்ணிக்கை	கூட்டுத்தொகை
20-30	25	3	3
30-40	35	5	8
40-50	45	20	28
50-60	55	10	38
60-70	65	5	43
		N = 43	

இங்கு, $\frac{N}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$

மற்றும் கூட்டு தொகையில் 21.5–யை விட சற்று பெரியது 28 ஆகும். எனவே

l = 40

h = 10

f = 20

c = 8

$$\therefore \text{ Median} = 40 + \frac{10}{20}\left(\frac{43}{2} - 8\right) = 46.75$$

3.3.5 முகடு (Mode)

முகடு என்பது அதிக முறை வரும் எண்ணின் எண்ணிக்கை ஆகும். இதை கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

எ.கா.

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	4	9	6	25	22	18	7	3

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து முகடை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

மேலே கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையில் அதிக அளவு உபயோகடுத்தப்பட்டது 4 ஆகும். அதாவது, 25 தடவை உபயோகப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு :

கொடுக்கப்பட்ட அளவு தொடர்ச்சியானதாக இருந்தால் கீழ்கண்ட சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

$$\text{Mode} = l + \frac{h\,(f_i - f_0)}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

இங்கு,

l = கீழ் மதிப்பாகும்

h = வித்தியாசம்

f_1 = frequency ஆகும்

f_0, f_2 = முன், பின் உள்ள அளவுகளாகும்.

எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து முகடை (Mode) காண்க.

இடைவேளை	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
Frequency	5	8	7	12	28	20	10	10

தீர்வு :

அதிக Frequency –க்கான இடைவேளை கீழ்கண்டவாறு உள்ளது. அதாவது 28. அதற்கான இடைவேளை 40–50.

$\therefore \quad l = 40, \quad h = 10, \quad f_1 = 28, \quad f_0, f_2 = 12, 20$

$$\therefore \text{Mode} = 40 + \frac{10\,(28 - 12)}{2(28) - 12 - 20}$$

$$= 46.67$$

3.4 Geometric மற்றும் Harmonic Mean :

Geometric Mean என்பது n எண்களின் பெருக்குத் தொகைக்கான n- வது வர்கம் ஆகும். இதை கீழ்கண்டவாறு கண்டறிய இயலும்.

எ.கா.

கீழ்கண்ட அளவுகளுக்கு Geometric Mean-யை கண்டறியவும்.

6.5, 169, 11, 112.5, 14.2, 75, 35.5 மற்றும் 215

தீர்வு :

X	**log X**
6.5	0.8129
169	2.2279
11	1.0414
112.5	2.0512
14.2	1.1523
75	1.18751
35.5	1.5502
215	2.3324
N = 8	Σ log X = 13.0434

$$GM = \text{antilog} \frac{\Sigma \log X}{N}$$

13.0434

$$= \text{antilog} \left(\frac{\quad}{.8} \right) = 42.70$$

எ.கா. 2

கீழ்கண்ட அளவுகளுக்கு GM-யை கண்டறியவும்.

எடை	100-104	105-109	110-114	115-119	120-124
Frequency (f)	24	30	45	65	72

தீர்வு :

எடை	f	இடை அளவு (m)	log (M)	f * log m
100-104	24	102	2.0086	48.2064
105-109	30	107	2.0294	60.8820
110-114	45	112	2.0492	92.2140
115-119	65	117	2.0682	134.4330
120-124	72	122	2.0684	150.2208
	N = 236			Σf.log m = 485.9562

$$GM = \text{antilog} \frac{\Sigma \text{ fx log m}}{N}$$

$$= 114.6$$

Harmonic Mean (H.M.)

கூட்டு சராசரியின் தலைகீழே Harmonic Mean (H.M.) எனப்படுகிறது.

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}}$$

எ.கா.

கீழ்கண்ட புள்ளி விபரங்களுக்கு H.M. –யை கண்டறியவும்.

125, 130, 75, 10, 45, 5, 0.5, 0.4, 500, 150

தீர்வு :

X	$\frac{1}{X}$
125	0.00800
130	0.00770
75	0.01333
10	0.10000
45	0.02222

5

0.200	
0.5	2.0000
0.4	2.5000
500	0.00200
150	0.00666
N = 10	Σ 1/x = 4.85991

$$H.M. = \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}} = \frac{10}{4.85991} = 2.06$$

எ.கா.

கீழ்காணும் அட்டவணைக்கு H.M. கண்டறியவும்.

வருமானம் (ரூ)	ஆட்களின் எண்ணிக்கை
10-20	4
20-30	6
30-40	10
40-50	7
50-60	3

தீர்வு :

வருமானம்	f	m	f/m
10-20	4	15	0.2667
20-30	6	25	0.2477
30-40	10	35	0.2857
40-50	7	45	0.1556
50-60	3	55	0.0545
	N = 30		Σ f/m = 1.0025

$$\text{H.M.} = \frac{N}{\Sigma \frac{f}{m}} = \frac{30}{1.0025} = 29.925$$

சுருக்கமாக

இந்த அத்தியாயமானது படங்களை பற்றியும் மற்றும் வரைபடங்களை பற்றியும் மேலும் அதன் பயன்பாடுகளை பற்றியும் தெளிவாக விளக்கியது. மேலும் A.M., G.M., மற்றும் H.M. கண்டறியும் முறைகளை தெளிவாக விளக்கத்துடன் விவரிக்கிறது.

பயிற்சிகள் :

1. கீழ்கண்ட அட்டவணைக்கு Line Diagram வரையவும்.

மாணவர்	1	2	3	4
உயரம்	192	165	177	189

2. படங்களின் வகைகளை பற்றி விளக்குக.

3. One Dimensional படங்களின் பயன்பாடுகளை விவரிக்கவும்.

4. மையப்புள்ளி சார்பு என்றால் என்ன ?

5. கீழ்கண்ட அட்டவணைக்கான A.M. –யை கண்டறியவும்.

X	1	2	3	4	5	6
f	9	5	13	16	14	10

6. கீழ்கண்ட அட்டவணைக்கு நடுக்கோடு (Median) கண்டறியவும்.

வயது	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
எண்ணிக்கை	3	8	17	10	5

7. கீழ்கண்ட அளவுகளுக்கு H.M.–யை கண்டறியவும்.

120, 135, 79, 10, 45, 5, 0.5, 0.4, 500, 150

குறிப்புகள்

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

அலகு - 4

மாறுதலின் அளவுகள்

(Measures of Variation)

4.1 முன்னுரை : –

மையப்புள்ளி சார்பு அளவுகளிலிருந்து சராசரி, நேர்கோடு மற்றும் முகடுகளின் சுருக்கத்தை அறிந்தோம். நமக்கு விநியோகத்தை பற்றிய (Distribution) தெளிவான கருத்திற்கு மாறுதல்களின் அளவுகளைப் பற்றி அறிந்திருத்தல் அவசியம்.

4.2. Measures of Dispersion :

கீழ்கண்ட மூன்று வகையான முக்கியமான Measures of Dispersion–யை காணலாம்.

1. Quartile Deviation (Q.D.)
2. Mean Deviation (M.D.)
3. Standard Deviation (S.D.)

Quartile Deviation (Q.D.) :

இந்த Quartile Deviation (Q.D.) என்பது

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இங்கு Q_1 மற்றும் Q_3 என்பது முதல் மற்றும் மூன்றாவது Quartile ஆகும்.

Q_1 – கொடுக்கப்பட்ட எண்களின் அளவு,

அதாவது $\frac{N+1}{4}$ யை விட சற்று பெரிய கூட்டுத் தொகை.

இதேபோல் Q_3 – $\frac{3(N+1)}{4}$ யை விட சற்று பெரிய கூட்டுத் தொகை.

எ.கா.

Quartile Deviation (Q.D.) உடைய குணகங்களையும் கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து கண்டுபிடிக்கலாம்.

உயரம் (H) இன்சீல்	frequency (f)
50	10
51	12
52	15
53	10
54	14
55	18
56	06

தீர்வு :

H	f	Cumulative f.reg. (c.f.)
50	10	10
51	12	22
52	15	37
53	10	47
54	14	61
55	18	79
56	6	85
	85	

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இங்கு, Q என்பது $\frac{(N+1)}{4}$ –ன் அளவைவிட சற்று பெரியதாக இருக்கக்கூடிய c.f. மதிப்பாகும்.

$$= \frac{85}{4} = 21.5$$

21.5 –யைவிட சற்றே பெரியது 22 ஆகும். அதற்கு தொடர்புடைய உயரம் 51” ஆகும்.

இதேபோலவே, Q_3 என்பது $\frac{S(N+1)}{4}$ –ல் கிடைக்கும் மதிப்பைவிட சற்று பெரியதாக இருக்கும். c.f. க்கு தொடர்புடைய உயரத்தை குறிக்கும்.

$$= \frac{3(85+1)}{4} = 64.5$$

64.5 –யைவிட சற்றே பெரியது 79 ஆகும். அதற்கு தொடர்புடைய உயரம் 79” ஆகும். எனவே,

$$\text{Q.D.} = \frac{55-51}{2} = 2''$$

$$\text{Q.D. ன் குணகம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{55-51}{55+51} = 0.0377''$$

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட கணக்கு தொடர் frequency –ஆக இருந்தால் கீழ்காணும் வழிமுறைகளை பின்பற்ற வேண்டும்.

(i) $\frac{N}{4}$ –யை கண்டுபிடிக்கவும். இங்கு N என்பது Σfi–க்கு சமமாகும்.

(ie.,) $N = \Sigma fi$

(ii) $\frac{N}{4}$ –யை விட சற்றே பெரிய c.f.o. மதிப்பை கண்டுபிடிக்கவும். அதற்கு தொடர்புள்ள மதிப்பே Q_1 ஆகும். இங்கு Q_1 என்பது

$$Q_1 = l + \frac{h}{\ } \left(\frac{N}{\ } - C \right)$$

f 4

இங்கு,

l = கீழ் மதிப்பு, Q_1 –க்கு தொடர்புடையது

f = Q_1 –ன் frequency ஆகும்

h = இடைவேளை

C = Q_1 –ன் c.f.–யில் முன்னாலிருக்கும் மதிப்பு

(iii) இதேபோல், Q_3 –யை கண்டறிய 3N/4–யைவிட சற்றே பெரிய c.f. மதிப்பை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$Q_3 = l + \frac{h}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

இங்கு,

l = கீழ் மதிப்பு, Q_3 –க்கு தொடர்புடையது

f = Q_3 –ன் frequency ஆகும்

h = இடைவேளை

C = Q_3 –ன் c.f.–யில் முன்னாலிருக்கும் மதிப்பு

எ.கா.

கீழ்காணும் அட்டவணையிலிருந்து Q, D–யை கண்டறியவும்.

மதிப்பெண்	0.5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
மாணவரின் எண்ணிக்கை	4	6	8	12	7	2

தீர்வு :

மதிப்பெண்	மாணவரின் எண்ணிக்கை	Cumulative f.reg. (c.f.)
0-15	4	4
5-10	6	10
10-15	8	18
15-20	12	30
20-25	7	37
25-30	2	39

$$\frac{N}{4} = \frac{39}{4} = 9.75$$

இங்கு 9.75 –யை விட சற்றே பெரிய c.f. மதிப்பு 11. இதற்கு தொடர்புடைய மதிப்பெண் 5–10 ஆகும். எனவே,

$l = 5, \quad h = 5, \quad f = 6, \quad c = 4$

$$Q_1 = l + \frac{h}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right)$$

$$= 5 + \frac{5}{6}\left(\frac{39}{4} - 4\right) = 9.79$$

இதேபோல், Q_3 –யை கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$Q_3 = l + \frac{h}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

இங்கு, 3N/4 = 29.25, இதைவிட சற்றே பெரிய c.f. மதிப்பு 30 ஆகும். அதற்கு தொடர்புடைய மதிப்பெண் 15–20. எனவே,

$l = 15, \quad h = 5, \quad f = 12, \quad c = 18$

$$Q_3 = 15 + \frac{5}{12}\left(\frac{3 \times 39}{4} - 18\right) = 19.69$$

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{19.69 - 9.79}{2}$$

$$= 4.95$$

4.3 **Mean Deviation** மற்றும் **Standard Deviation :**

(மைய விலக்கம் மற்றும் திட்ட விலக்கம்)

$\frac{xi}{fi}$, i = 1, 2, 3 .... n எனில்

மைய விலக்கம் (M.D.) சராசரி (A)–யை பொறுத்து கீழ்கண்டவாறு இருக்கும்.

இங்கு, $\sum$ Fi = N மற்றும்

திட்ட விலக்கம் (S.D.) = $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\left[\sum_i fi\,(Xi - X)^2\right]}$

Variance $\sigma = \frac{1}{N}\left[\sum_i fi\,(Xi - X)^2\right]$

எ.கா.

சராசரி மதிப்பிலிருந்து கீழ்காணும் அட்டவணையை பயன்படுத்தி மைய விலக்கத்தை (M.D.) கண்டறியவும்.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவரின் எண்ணிக்கை	5	8	15	16	6

தீர்வு :

மதிப் பெண்	இடை மதிப்பு (X_i)	f_i	$d_i = x_i - 25$	$f_i d_i$	$\lvert X_i - \bar{X} \rvert$	$f_i \lvert X_i - \bar{X} \rvert$
0-10	5	5	-20	-100	22	110
10-20	15	8	-10	-80	12	96
20-30	25	15	0	0	2	30
30-40	35	16	10	160	8	128
40-50	45	6	20	120	18	108
		$\Sigma f_i = 50$		$\Sigma f_i d_i = 100$		472

இங்கு,

சராசரி $$X = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} = 25 + \frac{100}{50} = 27$$

மைய விலக்கம் (சராசரி மதிப்பிலிருந்து)

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_i f_i \, (X_i - X)^2\right] = \frac{1}{50} = 472$$

$$= 9.44$$

எ.கா.

மைய விலக்கத்தை நடுக்கோட்டிலிருந்து கண்டறியவும்.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவரின் எண்ணிக்கை	5	8	15	16	6

தீர்வு :

மதிப் பெண்	இடை மதிப்பு (Xi)	fi	c.f.	$\mid Xi-Md \mid$	fi $\mid Xi-Md \mid$
0-10	5	5	5	23	115
10-20	15	8	13	13	104
20-30	25	15	28	3	45
30-40	35	16	44	7	112
40-50	45	6	50	17	102
		$\Sigma fi = 50$			478

இங்கு, $\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

25 –யை விட சற்றே பெரிய c.f. மதிப்பு 28 ஆகும். இதற்கு தொடர்புடைய மதிப்பெண் 20–30 ஆகும். எனவே,

நடுக்கோடு (Median) $= l + \frac{h}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$

இங்கு $l = 20$, $h = 10$, $f = 15$, $c = 13$

எனவே, $= 20 + \frac{10}{15}\left(\frac{50}{2} - 13\right) = 28$

எனவே, மைய விலக்கம் (M.D.) $= \frac{1}{N}\left[\sum_i fi\,(Xi - Md)\right]$

எ.கா. 3

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கத்தை கணக்கிடவும்.

வயது	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
உறுப்பினர்களின் எண்ணிக்கை	4	6	8	12	7	2	

தீர்வு :

வயது	Xi	fi	$d_i = \frac{X_i - 55}{10}$	fidi	$f_i d_i^2$
20-30	25	3	-3	-9	27
30-40	35	61	-2	-122	244
40-50	45	132	-1	-132	132
50-60	55	153	0	0	0
60-70	65	140	1	140	140
70-80	75	51	2	102	204
80-90	85	2	3	6	18
		$\Sigma fi = 542$		$\Sigma fidi = 15$	$\Sigma fidi^2 = 755$

இப்போது, சராசரி $X = \frac{h}{N} \Sigma fidi$

$$= 55 + \frac{10}{542}(-15) = 54.723$$

இதேபோல், திட்ட விலக்கம்

$$\sigma = \sqrt{h^2 \left[\frac{1}{N} \sum_i fidi^2 - \left[\frac{1}{N} \Sigma fidi \right]^2 \right]}$$

$$= \sqrt{141.067}$$

$$= 11.87$$

4.4 Correlation மற்றும் Regression

4.4.1 முன்னுரை :

இந்த அத்தியாயத்தின் மூலம் புள்ளியியல் எப்படி புள்ளி விவரங்களின் அளவை சுருக்கி இரண்டு காரணிகளுக்கு இடையேயான உறவின் அளவை தெளிவாக உணர்த்தும். மேலும், Regression–யை பயன்படுத்தி முன்கூட்டியே தகவல்களை அறிய முடியும்.

Correlation Analysis :

வரையறை :

Correlation என்பது இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையேயான உறவின் அளவை காட்டும். அதாவது இரண்டு மாறிகள் இருக்கும்போது ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றம் எவ்வாறு அதை சார்ந்துள்ள மாறியில் ஏற்படும் என்பதை தெரிவிக்கும்.

4.4.3 Karl Pearson's Correlation சூத்திரம்

$$r = \frac{\text{Cor.}(X, Y)}{\sigma x \, \sigma y}$$

இங்கு, Cor. (X, Y) என்பது Covariance of X and Y

σ x - திட்ட விலக்கம் X-யை பொருத்து

σ y - திட்ட விலக்கம் Y-யை பொருத்து

Correlation மற்றும் Regression-ன் குணங்கள் :

1. Correlation மதிப்பு எப்பொழுதும் (+1) மற்றும் (-1)–ற்கும் நடுவில்தான் அமையும்.
2. Regression–லிருந்து Correlation-மதிப்பை கீழ்கண்ட

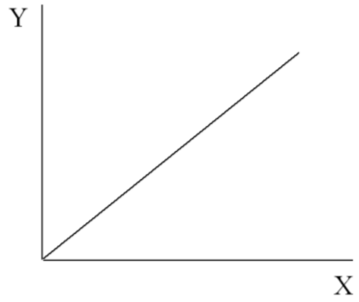
$$r = \pm \sqrt{bxy \times byx}$$

மேலும் Correlation–ன் மதிப்பை பொருத்து கீழ்கண்டவாறு விவரிக்கலாம்.

Case (i) :

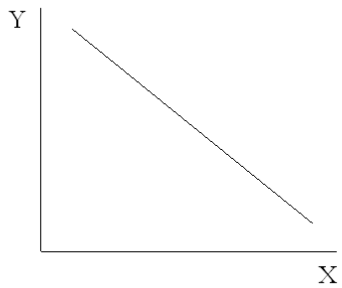
$r = \pm 1$ என்க.

இவ்வாறு இருக்கும்போது கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளுக்கு சரியான உறவு இருக்கின்றது என கூறலாம். இதை கீழ்கண்டவாறு படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.



Case (ii) :

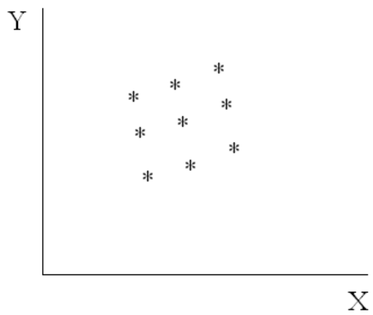
r = -1 எனில், கொடுக்கப்பட்ட மாறிகளுக்கான உறவு தலைகீழாக இருக்கின்றது என கொள்ளலாம். அதை கீழ்கண்டவாறு படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.



Case (iii) :

r = 0 எனக் கொள்க.

இதன் மூலம் நாம் அறிவது என்னவெனில், இரண்டு மாறிகளுக்கான உறவு இல்லை. அதை கீழ்காணுமாறு படத்தின் மூலம் விளக்கலாம்.



எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து விளம்பர செலவுகளுக்கும் விற்பனைக்கும் உள்ள பரஸ்பர சம்மந்தத்தை (Correlation) காணலாம்.

விளம்பர செலவு	7	10	9	4	11	5	3
விற்பனை (சாபாரங்களில்)	12	14	13	5	15	7	4

தீர்வு :

விளம்பர செலவு (X)	விற்–பனை (Y)	$(X-\overline{X})$	$(Y-\overline{Y})$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$	$(Xi-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
7	12	0	2	0	0	4
10	14	3	4	12	9	16
9	13	2	3	6	4	9
4	5	-3	-5	15	9	25
11	15	-4	5	20	16	25
5	7	-2	-3	6	4	9
3	4	-4	-6	24	16	36
7	10			83	58	124

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து

$$X = \frac{\sum x}{n} = 7$$ மற்றும்

$$Y = \frac{\sum y}{n} = 10$$

$\sum (X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = 83,$

$\sum (X-\overline{X})^2 = 58$ மற்றும்

$\sum (Y-\overline{Y})^2 = 124$

Cor. (X, Y) = 83,

$x = \sqrt{58}$

$y = \sqrt{124}$

$$r = \frac{\text{Cor. }(X, Y)}{\sigma x \sigma y} = \frac{83}{\sqrt{58 x 124}} = 0.97$$

4.4.3 Rank Correlation (தர பரஸ்பர சம்மந்தம்) :

இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான தர பரஸ்பர சம்மந்தமே Rank Correlation என அழைக்கப்படுகின்றது. இதை கீழ்கண்ட Spearmann சூத்திரத்தின் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

எ.கா.

$$r = 1 \frac{\sum_{i=1}^{n} di^2}{n(n^2-1)}$$

இங்கு, di = Xi - Yi

எ.கா.

கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து தர பரஸ்பர சம்மந்தத்தை அறியவும்.

கணிதத்தில் தரம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
புள்ளியயலில் தரம்	1	10	3	4	5	7	2	6	8	11	15	9	14	12	16	13

தீர்வு :

கணிதத்தில் Xi	புள்ளியியலில் Yi	$d_i = X_i - Y_i$	d_i^2
1	1	0	0
2	10	-8	64
3	3	0	0
4	4	0	0
5	7	-2	4
6	7	-1	1
7	2	5	25
8	6	2	4
9	8	1	1
10	11	-1	1
11	15	-4	16
12	9	3	9
13	14	-1	1
14	12	2	4
15	16	-1	1
16	13	3	9
			136

$$R = 1 - \frac{6\sum d_{i_2}}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 136}{16(256-1)}$$

$$= 1 - \frac{816}{4080} = 0.8$$

4.4.5 Correlation மற்றும் Regression-க்கும் உள்ள வேற்றுமைகள்.

	Correlation	Regression
1.	Correlation ஆனது உறவின் கோணத்தையும் மற்றும் திசையையும் அளக்கின்றது.	இங்கு இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான, மாறிகளின் தன்மையை அளக்கின்றது.
2.	இங்கு இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையேயான உறவை தெளிவாக அளக்கின்றது.	இங்கு மாறிகளுக்கு இடையேயான மிகச் சரியான உறவை அளக்கின்றது.
3.	இதில் குணகங்கள் மையப்புள்ளி (Origin) மற்றும் அளவுகளை (Scale) சார்ந்திராது.	இங்கு Regression மையப் புள்ளியை சார்ந்திருக்காது. ஆனால் அளவை சார்ந்திருக்கும்.
4.	இங்கு எப்பொழுதும் இதன் மதிப்பு -1 லிருந்து +1 வரை இருக்கும்.	இங்கு இதனுடைய உறவு கீழ்கண்டவாறு இருக்கும். $Y = oa + bx$, $Y = a + bx + cx^2$
5.	இதை பயன்படுத்தி தொலைநோக்கி (forecasting) அறிய இயலாது.	இதை பயன்படுத்தி சார்புடைய மாறிகளின் (dependent Variable) மதிப்பை, சார்பற்ற மாறிகளின் (Independent Variable) மூலம் அறியலாம்.

4.4.7 Regression கோடுகள்.

சாதாரண Regression Model-களுக்கு கீழ்கண்டவாறு இரண்டு வகையான நேர்கோடுகள் உள்ளது.

(i) X-ஆனது Y-சார்ந்துள்ள

(ii) Y-ஆனது X-யை சார்ந்துள்ள

X-ஆனது Y-யை சார்ந்துள்ள Regression கோடுகள்

இந்த கோட்டை கீழ்கண்டவாறு எழுத இயலும்.

$$(X-\overline{X}) = bxy\,(Y-\overline{Y})$$

அல்லது

$$(X-\overline{X}) = r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}\,(Y-\overline{Y})$$

qஎனவே, $bxy = r\,\frac{\sigma x}{\sigma y}\,r$

இதேபோல், Y-ஆனது X-யை சார்ந்துள்ள நேர்கோட்டை கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$(Y-\overline{Y}) = byx\ (X-\overline{X})$$

அல்லது

$$(Y-Y) = r\ \frac{\sigma y}{\sigma x}\ (X-\overline{X})$$

$$\text{qளனவே,}\quad byx = r\frac{\sigma y}{\sigma x}r$$

இங்கு, X - X-தொடரின் கூட்டு சராசரியாகும்

Y - Y-தொடரின் கூட்டு சராசரியாகும்

σx - X-ன் திட்ட விலக்கமாகும்

σy - Y-ன் திட்ட விலக்கமாகும்

r - Correlation

குறிப்பு :

byx மற்றும் byx –யை கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$byx = \frac{\Sigma\ (Y-\overline{Y})\ (X-\overline{X})}{\Sigma\ (X-\overline{X})^2} \text{ மற்றும்}$$

$$bxy = \frac{\Sigma\ (Y-\overline{Y})\ (X-\overline{X})}{\Sigma\ (Y-\overline{Y})^2}$$

எ.கா.

கீழ்காணும் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து,

1. இரண்டு வகையான Regression கோடுகளை காண்க.
2. Correlation மதிப்பை காண்க.
3. வணிகவியலின் மதிப்பெண்ணை பொருளாதாரத்தின் மதிப்பு 30–ஆக இருக்கும்போது காண்க.

வணிகவியலின் மதிப்பெண்	25	28	35	32	31	36	29	38	34	32
பொருளாதாரத்தின் மதிப்பெண்	43	46	49	41	36	32	31	30	33	39

1. தீர்வு :

X	Y	$(X-\bar{X}) = (X-32)$	$(Y-\bar{Y}) = (Y-38)$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$
25	43	-7	5	49	25	-35
28	46	-4	8	16	64	-32
35	49	3	11	9	121	33
32	41	0	3	0	9	0
36	32	4	-6	1	4	2
29	31	-3	-7	9	49	21
38	30	6	-8	36	64	-48
34	33	2	-5	4	25	-10
32	39	0	1	0	1	0
320	380	0	0	140	398	-93

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{320}{10} = 32$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{380}{10} = 38$$

$$byx = \frac{\sum (X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sum (X-\bar{X})^2} = \frac{-93}{149} = 0.6643$$

இதேபோல்,

$$bxy = \frac{\sum (X-X)(Y-Y)}{\sum (Y-Y)^2} = \frac{-93}{398} = 0.2337$$

இதை பயன்படுத்தி கீழே கண்டவாறு இரண்டு நேர்கோடுகளை காண இயலும்.

X on Y

(X-X) = bxy (Y-Y)

(x-32) = 0.2337 (Y-38)

X = -0.2337 Y + 40.8806

Y-on X

(Y-Y) = byx (X-X)

(Y-38) = -0.6643 (X-32)

$Y - 0.6643 X + 59.2576$

(2) Correlation–யை கீழ்கண்டவாறு காணலாம்.

$$r = \pm \sqrt{byx \times bxy}$$

$$= \pm \sqrt{0.1552} = \pm \sqrt{0.394}$$

(3) பொருளாதாரத்தின் மதிப்பெண் 39–ஆக இருக்கும்போது, வணிகவியலின் மதிப்பெண் கீழ்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டுபிடிக்க முடியும்.

$$Y = -0.6643 x + 59.2576$$

$$Y = -0.6643 \times 30 + 59.2576$$

$$= 39.32$$

$$Y \cong 39$$

சுருக்கமாக

மேற்கண்ட அத்தியாயத்தில் மாறிகளின் அளவை பற்றியும், Correlation மற்றும் Regression–யை பற்றியும் அறிந்தோம்.

பயிற்சிகள் :

1. கீழ்கண்ட அட்டவணைக்கு Quartile Deviation (Q.D.) மற்றும் அதன் குணகங்களையும் காண்க.

எடை (in Kg)	59	53	52	58	54	55	60
Frequency	10	12	18	10	19	18	6

2. கீழ்கண்ட அட்டவணைக்கு Mean Deviation (M.D.) சராசரியிலிருந்து கண்டறியவும்.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	5	25	6	6

3. கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து Mean Deviation (M.D.)–யை நடுக்கோட்டிலிருந்து (Median) காண்க.

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	25	8	5	6	6

4. Correlation–ன் மதிப்பை கீழ்காணும் மாறிகளுக்கு காண்க.

X	100	200	300	400	500	600	700
Y	0.3	0.5	0.6	0.8	1	1.1	1.3

5. பத்து மாணவர்களின் B.E. மற்றும் M.E. தேர்வின் சதவீதங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதே சூழ்நிலையில் ஒரு மாணவன் 76% B.E.–ல் பெற்றால் அவன் M.E.–யில் என்ன சதவீதம் பெறுவான்.

B.E. 65	58	40	67	72	48	54	76	54	66
M.E. 70	75	62	45	78	60	40	64	45	61

குறிப்புகள்

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

அலகு - 5

குறியீட்டு எண் மற்றும் காலத் தொடர்கள்

(Index Numbers and Time Series)

5.1 குறியீட்டு எண்கள் (Index Numbers) :

வரையறை :

குறியீட்டு எண் என்பது ஒரு புள்ளியியல் அளவாகும். இதை பயன்படுத்தி ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றங்கள் மற்றும் அதை சார்ந்தவைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை, காலத்தை மற்றும் அவைகள் அமைந்த பூகோள நிலையை பொருத்து அறியமுடியும்.

5.1.1 குறியீட்டு எண்ணின் வகைகள் :

குறியீட்டு எண்களில் நிறைய வகைகள் உள்ளன. அவற்றை கீழ்கண்டவாறு மூன்று வகையாக பிரிக்க இயலும்.

1. விலை குறியீட்டு எண் (Price Index)

பணத்தின் மதிப்பை அறிய எப்பொழுதும் விலைக் குறியீட்டு எண் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இந்த குறியீட்டு எண்ணானது மற்ற பொருட்களின் விலையுடன் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஒப்பிட்டு பார்த்த அறிய முடிகிறது. இதிலும் இரண்டு வகையான விலை குறியீட்டு எண்கள் உள்ளன. அதாவது, மொத்த விலை குறியீட்டு எண் (Wholesale Price Index Number) மற்றும் சில்லறை விலை குறியீட்டு எண் (Retail Price Index Number). இதில் மொத்த விலை குறியீட்டு எண்ணின் மாற்றமானது மொத்த நாட்டின் பொது விலையின் அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை காட்டும். இதே போல், சில்லறை விலை குறியீட்டு எண்ணானது சில்லறை விலையில் ஏற்படும் மாற்றத்தை தெரிவிக்கும்.

2. அளவு குறியீட்டு எண் (Quantitative Index) :

அளவு குறியீட்டு எண்ணை பயன்படுத்தி மொத்த உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களின் அளவு அல்லது பயன்படுத்தப்பட்ட பொருட்களின் அளவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய முடியும்.

3. மதிப்பு குறியீட்டு எண் (Value Index) :

இந்த குறியீட்டு எண்ணை பயன்படுத்தி மொத்த மதிப்பை ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு எடுத்துக்கொண்டு, உதாரணத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட ஒரு காலத்தில் உள்ள மதிப்புடன் ஒப்பிட்டு பார்த்து அதில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அறிய முடியும்.

குறியீடுகள் மற்றும் குறியீட்டு எண்களை அமைக்கும் முறைகள்

அடிப்படை ஆண்டு (Base Year)

ஒப்பிடுதலுக்கு எடுத்துக்கொண்ட உதாரண வருடம்

P_o – பொருட்களின் விலை அடிப்படை ஆண்டை பொருத்து

P_1 – பொருட்களின் விலை நடப்பாண்டை பொருத்து

Q_0 – பொருட்களின் அளவு உபயோகப்படுத்தப்பட்டது அல்லது வாங்கியது அடிப்படை ஆண்டை பொருத்தது

Q_1 – பொருட்களின் அளவு பயன்படுத்தியது அல்லது வாங்கியது நடப்பாண்டை பொருத்து

W – பொருட்களுக்குண்டான எடை அதனுடைய முக்கியத்துவத்தை பொருத்து

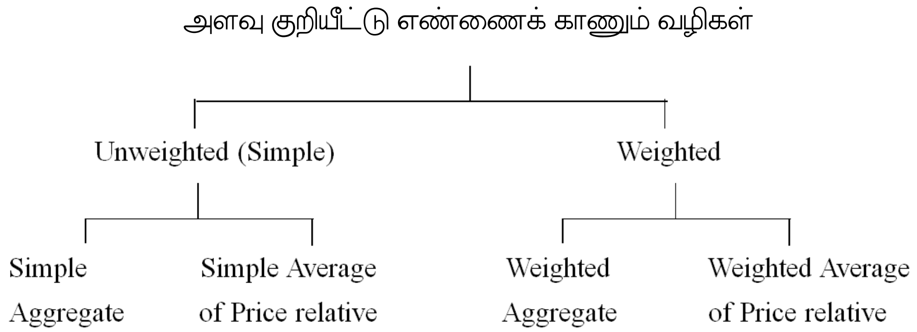
P_{01} – அடிப்படை ஆண்டிற்கான விலை குறியீட்டு எண் அடிப்படை ஆண்டை பொருத்து

P_{10} – நடப்பாண்டிற்கான விலை குறியீட்டு எண் நடப்பாண்டை பொருத்து

Q_{01} – நடப்பாண்டிற்கான அளவு குறியீட்டு எண் அடிப்படை ஆண்டை பொருத்து

Q_{10} – அடிப்படை ஆண்டிற்கான அளவு குறியீட்டு எண் நடப்பாண்டை பொருத்து

அளவு குறியீட்டு எண்ணை கண்டறிவதற்கான வகைகள் :



5.1.2 **Unweighted (Simple)**

இது மிகவும் எளிதான வழியாகும். இதில் வித்தியாசமான பொருட்களின் விலைகளை நடப்பாண்டை பொருத்துக் கூட்டி அதை அடிப்படை ஆண்டிற்கான மொத்த அளவால் வகுத்து வரும் விடையை 100–ஆல் பெருக்க வேண்டும்.

அதாவது,

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 \times 100}{\sum P_0}$$

5.1.3 **Simple Average Method**

ஒவ்வொரு பொருளின் விலைத் தொடர்புகளை தனியாக சராசரி காணும் முறை.

$$P_{01} = \frac{\frac{P_1 \times 100}{P_0}}{N} = \frac{\sum P}{N}$$

இங்கு, N - 0 பொருட்களின் எண்ணிக்கை.

இதில் பெருக்குத் தொடரை கூட்டு தொடருக்குப் பதில் பயன்படுத்தினால், கீழ்காணும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தலாம்.

$$P_{01} = \text{antilog}\left[\frac{\sum \log \frac{P_1 \times 100}{N}}{N}\right]$$

$$= \text{antilog}\left[\frac{\sum \log (P)}{N}\right]$$

5.1.4 Weighted Index Number

இது இரண்டு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அவை,

1. Weighted Aggregate
2. Weighted Average Price Relative

இதில் Weighted Aggregate–ற்கான குறியீடு எண்ணை காண கீழ்கண்ட சில முக்கியமான சூத்திரங்களின் பெயர்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

1. லேஸ்பியர் வழி (Laspyre's Method)
2. பாஸ்ச்சி வழி (Paasche's Method)
3. பௌலி வழி (Bowley's Method)
4. பிஸ்ஸர் வழி (Fishers's Method)
5. மார்ஷல் வழி (Marshall's method)
6. கெல்லீஸ் வழி (Kelly's Method) மற்றும்
7. வால்ச் வழி (Walsch's Method)

குறிப்பு :

குறியீட்டு எண்ணை காண நிறைய வழிமுறைகள் இருந்தாலும் அவற்றில் சிறந்ததை காண கீழ்காணும் இரண்டு சோதனைகளை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

1. Time Reversal Test
2. Factor Reversal Test

5.1.5 தொடர் அடிப்படை முறை (Chain Base Method)

அடிப்படையானது எப்பொழுதும் மாறியோ அல்லது மாறாமலோ இருக்க வேண்டும். இதில் அடிப்படை மாறாமல் இருக்கும்போது அடிப்படையை தவிர மற்ற அனைத்து அளவுகளும் மாற அனுமதிக்கப்படும். அடிப்படை மாறும் விகிதத்தில் உள்ள கணக்கீட்டு முறை, அதாவது தொடர் அடிப்படை முறையில் ஒவ்வொரு முறையும் கணக்கீட்டிற்கு தேவையான நடப்பாண்டை எடுத்துக்கொண்டு அதற்கு தேவையான அடிப்படை ஆண்டை கணக்கிட வேண்டும். அதாவது, ஒவ்வொரு ஆண்டும் அடிப்படை மாறிகொண்டே இருக்கும்.

$$\text{தொடர் அடிப்படை முறை} = \frac{\text{அடிப்படை ஆண்டு} \times \text{முந்தைய வருட தொடர் குறியீட்டு எண்}}{100}$$

5.1.6 நிலையான அடிப்படை முறை

பொருட்கள் மாறினாலும் அடிப்படை ஆண்டு மாறாது.

5.1.7 Consumer Price Index (or) Cost of Living Index

இதில் இரண்டு வகையான குறியீட்டு எண் அமைக்கும் முறை உள்ளது.

1) Aggregate Method
2) Family Budget Method

1. Aggregate Method (or) Aggregate Expenditure Method

இது லேஸ்பியர்ஸ் முறையை சார்ந்துள்ளது. இதுவே அதிக அளவு பயன்படுத்தும் முறையாகும். இது ஒரு குறிப்பிட்ட குழுக்கள் பயன்படுத்தும் பொருட்களின் அளவு அடிப்படை ஆண்டை பொருத்து என்பதே Weight ஆகும்.

$$\text{Consumer Price Index} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

2. Family Budget Method

இதில் ஒவ்வொரு குடும்பத்தின் வெவ்வேறு பொருட்களுக்கு ஆகும் செலவை எடையாக எடுத்துக் கொண்டு கணக்கிடலாம்.

$$\text{Consumer Price Index} = \frac{\sum \frac{P_1}{P_0} \times 100}{\sum V}$$

இங்கு, V – எடையின் அளவாகும்.

5.2 காலத்தொடரின் ஆய்வு (Time Series Analysis)

எந்தவொரு முடிவெடுக்கும் முறையிலும் தொலைநோக்கு என்பது மிகவும் தேவைப்படும் கருவியாகும். ஒரு சிறந்த தொலைநோக்கு என்பது, தொலைநோக்குவதற்கு பயன்படுத்தப்படும் ஆதாரத்தை பொருத்தே அமையும். இங்கு காலத்தொடர் என்பது சரியான காலச் சுழற்சியில் பதிவு செய்யப்படும் புள்ளி விபரம் ஆகும்.

5.2.1 காலத்தொடரின் உறுப்புகள் (Components of Time Series)

நான்கு வகையான உறுப்புகள் காலத் தொடர் ஆய்வில் உள்ளது.

1. Secular Trend
2. Cyclical Fluctuation
3. Seasonal Variation
4. Irregular Variation

Secular Trend :

மாறிகளின் மதிப்பு கூடியோ அல்லது குறைந்தோ ஒரு காலகட்டத்தை பொருத்து இருக்கும்.

(எ.கா.) தொடர்ந்து உயர்ந்து கொண்டிருக்கும் வாழ்வதற்கு ஆகும் செலவுகளை பயன்படுத்துவோர் குறியீட்டு எண்ணில் பதிவு செய்வது.

Cyclical Fluctuation :

இதற்கு மிகச்சிறந்த உதாரணம் வியாபார சுழற்சி முறையாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட காலச் சுழற்சியால் வியாபாரம் உச்சத்தை அடைவதும் பின்பு அதே கால சுழற்சியில் மிகவும் கீழ் நோக்கி தொடுவதும் Cyclical Fluctuation என கூறலாம்.

Seasonal Variation :

இது ஒரு வகையான ஒரு வருடத்திற்குள் ஏற்படும் மாற்றம். இது ஒவ்வொரு வருடமும் ஏற்படக்கூடியதாகும். உதாரணமாக குளிர்பானம் விற்கும் ஒரு வியாபாரி ஒவ்வொரு வருடமும் வெயில் காலத்தை தன் வியாபாரத்திற்கு உகந்த காலமாக கருதுவார்.

Irregular Variation :

இந்த வகையான மாற்றமானது திடீரென ஏற்படும் மாற்றத்தால் ஏற்படும் பாதிப்பை குறிக்கும். இந்த வகை மாற்றத்தை தொலைநோக்கு பார்வையில் அறிய இயலாது.

5.2.2 Trend Analysis :

காலத்தொடரில் உள்ள 4 வகையான உறுப்புகளில் Trend ஆனது நீண்ட கால திசையை உடையது. இதில் புள்ளிவிவரங்களை பயன்படுத்தி அதை நேர்கோடாக பொருத்தி Trend–யை அறிய முடியும். அதற்கு கீழ்காணும் 4 முறைகள் பயன்படுத்தலாம்.

(1) Graphic or Free Hand Method

இதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவை வரைப்பட (Graph) தாளில் குறித்து நேர்கோடாக பொருத்த முடியும்.

(2) Semi Average Method

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தை இரண்டு பகுதியாகப் பிரித்து அதற்கு சராசரி கண்டுபிடித்து, முதல் சராசரியை அதன் முதல் பகுதியில் உள்ள நடுக்காலத்திற்கு நேராக வரைபடத்தில் குறிக்கலாம். இதேபோல், இரண்டாவது பகுதியில் உள்ள சராசரியையும் குறிக்கலாம். இப்போது, வரைபட தாளில் இரண்டு காலப்பகுதிக்கு சம்பந்தப்பட்ட இரண்டு புள்ளிகளை காணலாம். அவ்விரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்தால் நமக்கு தேவையான Trend Line கிடைக்கும்.

(3) Moving Average Method

இதில் நகரும் அளவுகளை தேர்வு செய்து கொண்டு, நகரும் கூடுதல் சராசரிகளை (Moving Average)–யைப் பெறலாம். இதைப் பயன்படுத்தி Trend Line–யை வரையலாம்.

(4) Method of Least Square

இந்த முறையை பயன்படுத்தி நேர்கேடை பொருத்த முடியும். அதற்கு உண்டான நீட்டல் சமன்பாடு (Linear Equation) கீழ்கண்டவாறு இருக்கும்.

$$Y = a + bx$$

எனவே, அதற்கு சம்மந்தப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$\sum Y = na + \sum x$$

$$\sum XY = a \sum x + b \sum x^2$$

எ.கா.

ஒரு சிறிய தொழிற்சாலை சேலத்தில் உள்ளது. அதில் தொலைக்காட்சி பெட்டி உற்பத்தி செய்யப்படுகிறது. அவற்றின் வருடாந்திர விற்பனை எண்ணிக்கை கீழ்கண்ட அட்டவணையில் உள்ளது.

வருடம்	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனை	42	50	61	75	92	111	120	127	140	138

(i) நேர்கோடை பொருத்துக

(ii) தொலைக்காட்சி பெட்டியின் வியாபார எண்ணிக்கையை 1998–ம் ஆண்டிற்கு தொலைநோக்கி கண்டறியவும்.

Year	X	Y	XY	X^2
1987	-9	42	-378	81
1988	-7	50	-350	49
1989	-5	61	-305	25
1990	-3	75	-225	9
1991	-1	92	-92	1
1992	1	111	-111	1
1993	3	120	360	9
1994	5	127	635	25
1995	7	140	980	49
1996	9	138	1242	81
Total	0	956	1978	330

(1) $$a = Y = \frac{956}{10} = 95.6$$

$$b = Y = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{1978}{330} = 5.9939$$

எனவே, $Y = 95.6 + 5.9939\,X$

(இங்கு 1991.5 = 0 எனவும், ஒரு X = 0.5 வருடம் எனவும் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது).

(2) இங்கு X = 13 என எடுத்துக் கொண்டால்

$$X = \frac{1998 - 1991.5}{0.5} = \frac{6.5}{0.5} = 13$$

$$Y = 95.6 + 5.9939 \times 13$$

$$= 173.5 \cong 174$$

சுருக்கமாக

மேற்கண்ட அத்தியாயத்தில் குறியீட்டு எண்ணிற்கான தேவையை பற்றியும், அதை கணக்கிடும் முறையை பற்றியும் அறிந்தோம். மேலும் காலத் தொடர்பிற்கான உறுப்புகளை பற்றியும் அதிலிருந்து தொலை நோக்குவது எவ்வாறு எனவும் விளக்கப்பட்டது.

பயிற்சி :

1. கீழ்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து

வருடம்	1990	1991	1992	1193	1994	1995
எண்ணிக்கை	50	110	350	1020	1950	3710

   (i) நேர்கோட்டு சமன்பாட்டை காண்க.

   (ii) 1999–ம் ஆண்டிற்கான எண்ணிக்கையை காணவும்.

2. குறியீட்டு எண்களை பற்றி விரிவாக விவரிக்கவும்.

3. ஒரு உற்பத்தி செய்யும் தொழிற்கூடத்தின் உற்பத்திகள் கீழே அட்டவணை படுத்தப்பட்டுள்ளது. அதிலிருந்து நேர்கோட்டு சமன்பாட்டை காண்க. மற்றும் 2007–ம் ஆண்டிற்கான உற்பத்தியையும் கணக்கிடுக.

வருடம்	1999	2000	2001	2002	2003
உற்பத்தி (ஆயிரங்களில்)	700	600	400	900	900

குறிப்புகள்

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………

குறிப்புகள்

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………